Об обобщении одной теоремы С. Б. Стечкина

Х. ТЮРНПУ (Тарту, СССР)

В настоящей заметке мы обобщаем одну известную теорему С. Б. Стечкина, которая утверждает, что всякая S_p-система, являющаяся базисной последовательностью Гильберта, есть система безусловной почти всюду сходимости в пространстве l^2.

1. Пусть[1]) (T, Σ, μ) — пространство с положительной мерой и пусть функции $\varphi_k \in TM(T, \Sigma, \mu)$. Рассмотрим ряд

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$$

где $x = \{\xi_k\} \in l^q (1 < q < \infty)$. В случае, когда μ — мера Лебега и $T = [a,b]$, Никишин в работе [5] (стр. 158) нашел необходимое и достаточное условие для сходимости почти всюду ряда (1), именно: ряд (1) сходится для всех $x \in l^q$ почти всюду на $[a,b]$ тогда и только тогда когда для каждого $\varepsilon > 0$ и $p < \min(q,2)$ существуют измеримое подмножество $T_{\varepsilon p} \subset [a,b]$ с $\operatorname{mes} T_{\varepsilon p} > b-a-\varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon p} > 0$ такие, что

$$(2) \qquad \left\{ \int_{T_{\varepsilon p}} \left(\sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t) \right| \right)^p dt \right\}^{1/p} \leqq M_{\varepsilon p} \|x\|_q .$$

С другой стороны, Стечкин (см. [2] стр. 31) установил при $q=2$, что если система $\varphi = \{\varphi_k\}$ удовлетворяет для некоторого $p > 2$ условию

$$(3) \qquad \int_a^b \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t) \right|^p dt \leqq M_p \left\{ \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \right\}^{p/2},$$

то ряд (1) сходится безусловно почти всюду на $[a, b]$ для всех $x \in l^2$. Гапошкин (см. [2] стр. 30) нашел, что условие (3) гарантирует не только безусловную сходимость почти всюду на $[a, b]$ ряда (1) для всех $x \in l^2$, но является достаточ-

---

[1]) Мы воспользуемся обозначениями и определениями из книги [3].

ным условием для того, чтобы при любой перестановке членов мюжоранты частичных сумм ряда (1) для $x \in l^2$ принадлежат пространству L_p. Очевидно, что в силу вышеуказанной теоремы Никишина, результат Стечкина содержится в утверждении Гапошкина.

В настоящей заметке мы докажем следующее

Теорема 1. *Если система φ удовлетворяет следующему условию: для некоторого $T_1 \in \Sigma$ с $\mu(T_1) < \infty$ и для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $T_\varepsilon \in \Sigma$ с $T_\varepsilon \subset T_1$ и $\mu(T_\varepsilon) > \mu(T_1) - \varepsilon$ и постоянная $M_{\varepsilon pq} > 0$ такие, что для некоторого $p > q > 1$*

$$\int_{T_\varepsilon} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t) \right|^p \mu(dt) \leqq M_{\varepsilon pq} \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^q \right)^{p/q}, \tag{4}$$

то найдется $M'_{\varepsilon pq} > 0$ такое, что

$$\int_{T_\varepsilon} \left(\max_{n \leqq m} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t) \right| \right)^p \mu(dt) \leqq M'_{\varepsilon pq} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^q \right)^{p/q} + \sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^q \right\}. \tag{5}$$

Учитывая, что в случае σ-конечности меры μ, мы имеем, что $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ с $\mu(T_k) < \infty$, мы из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Пусть (T, Σ, μ) — пространство с σ-конечной меры. Если для каждого $T_1 \in \Sigma$ с $\mu(T_1) < \infty$ и для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $T_{1\varepsilon} \in \Sigma$ с $T_{1\varepsilon} \subset T_1$ и $\mu(T_{1\varepsilon}) > \mu(T_1) - \varepsilon$ и постоянное $M_{\varepsilon pq} > 0$ такие, что для некоторого $p > q > 1$*

$$\int_{T_{1\varepsilon}} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t) \right|^p \mu(dt) \leqq M_{\varepsilon pq} \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^q \right)^{p/q}. \tag{6}$$

то μ-почти всюду на T для всех $x \in l^q$

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t) = O_t(1). \tag{7}$$

На самом деле, учитывая, что при $x \in l^q$ из неравенства (5) следует, что $\sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t) \right| < \infty$ μ-почти всюду на T_1, и, замечая, что кроме того μ-почти всюду на T_1 для всех $x_\nu = \{\xi_k^\nu\}$ с $\xi_k^\nu \equiv 0$ при $n > \nu$ существует предел

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} \xi_k^\nu \varphi_k(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k^\nu \varphi_k(t),$$

мы получаем из теоремы Банаха (см. [3], стр. 361), что ряд (1) для всех $x \in l^q$ сходится μ-почти всюду на T_1. Следовательно, ряд (1) для всех $x \in l^q$ сходится μ-почти всюду и на T.

Кроме того, он сходится безусловно μ-почти всюду, ибо условие (6) не зависит от перестановки членов ряда (1). Итак доказано ещё

Следствие 2. *Если* (T, Σ, μ) *— пространство с σ-конечной положительной мерой и система φ удовлетворяет условию* (6), *то ряд* (1) *для всех* $x \in l^q$ *безусловно сходится μ-почти всюду на* T.

Очевидно, что утверждение Гапошкина содержится в следствии 1, а утверждение Стечкина в следствии 2.

Отметим еше одно следствие, вытекающее из следствия 2 при Лебеговой меры μ на отрезке $[a, b]$.

Следствие 3. *Пусть μ — мера Лебега и* $T=[a, b]$. *Если ряд* (1) *сходится по мере на T для всех* $x \in l^{q'}$ *с* $q' \leqq 2$, *то он сходится безусловно почти всюду на T для всех* $x \in l^{p'}$ *с* $p' < q'$.

Доказательство вытекает из теоремы Никишина (см. [5] стр. 158), в силу которой из сходимости ряда (1) по мере на $[a, b]$ для ξ всех $x \in l^{q'}$ с $q' \leqq 2$ вытекает, что для каждого $\varepsilon > 0$ и $r < q'$ найдутся измеримое подмножество $T_{\varepsilon r} \subset [a, b]$ с $\operatorname{mes} T_{\varepsilon r} > b-a-\varepsilon$ и постоянное $M_{\varepsilon r} > 0$ такое, что для всех $|\xi_k| \leqq 1$

$$\left\{\int_{T_\varepsilon} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t) \right|^r dt\right\}^{1/r} \leqq M_{\varepsilon r} \left\{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^{q'}\right\}^{1/q'}. \tag{8}$$

Пусть $p' < r < q'$. Тогда, учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^{p'} \geqq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^{q'},$$

получаем из неравенства (8), что выполнено условие (6) с $p=r$ и $q=p'$. Следствие доказано.

При ортонормальных системах и $q=2$ следствие 3 известно (см. например, [4] стр. 200).

2. Для доказательства теоремы нам нужно следующее видоизменение леммы 1.3.2 из [2].

Лемма. *Пусть* $\{\varphi_k(t)\}$ *— последовательность функций и* $\xi_m, \dots, \xi_n$ *— действительные числа с* $|\xi_m| \leqq 1, \dots, |\xi_n| \leqq 1$ *и* $\sum_{k=m}^{n} |\xi_k|^q = a$. *Пусть ν — наименьшее натуральное число, для которого* $am/2^\nu \leqq \min_{m \leqq k \leqq n} |\xi_k|^q$. *Тогда существуют такие номера* $m=l_0<l_1<\dots<l_{2^\nu}=n$, *что при каждом* $s=1, 2, \dots, \nu$ *полином* $P(t)=\sum_{k=m}^{n} \xi_k \varphi_k(t)$ *можно представить в виде суммы*

$$P(t) = \sum_{i=1}^{2^s} P_s^{(i)}(t),$$

где

$$P_s^{(i)}(t) = \sum_{k=l_{(i-1)2^{\nu-s}}}^{l_{i2^{\nu-s}}} \xi_k' \varphi_k(t) \quad (i = 1, \dots, 2^s),$$

$\xi_k' = \xi_k'(s, i)$, $\xi_k' = \xi_k$ *при* $k \neq l_j$, $|\xi_k'| \leqq |\xi_k|$ *при* $k = l_j$ $(j = 0, 1, \dots, 2^\nu)$;

$$\xi'_{l_{i2^{\nu-s}}}(s, i-1) + \xi'_{l_{i2^{\nu-s}}}(s, i) = \xi_{l_{i2^{\nu-s}}},$$

$$A(P_s^{(i)}) = \sum_{n=l_{(i-1)2^{\nu-s}}}^{l_{i2^{\nu-s}}} |\xi_k'|^q \leqq \frac{a}{2^s} \quad (i = 1, \dots, 2^s;\ s = 1, \dots, \nu).$$

Доказательство проведем в основном так, как в монографии [1] стр. 705—706, где это доказана при $q=2$. Пусть $s=1$. Найдем число $m<l<n$ так, чтобы

$$\sum_{k=m}^{l-1} |\xi_k|^q < \frac{a}{2} < \sum_{k=m}^{l} |\xi_k|^q. \tag{9}$$

Если в неравенстве (9) стоит знак равенства, то утверждение доказано. Пусть

$$\delta = \frac{a}{2} - \sum_{k=m}^{l-1} |\xi_k|^q > 0,$$

тогда $0<\delta<|\xi_l|^q$. Определим ξ_l' равенствами

1° $|\xi_l'| = \delta^{1/q}$ и 2° $\operatorname{sgn} \xi_l' = \operatorname{sgn} \xi_l$.

Тогда имеет место следующее неравенство

$$|\xi_l - \xi_l'| \leqq (|\xi_l|^q - \delta)^{1/q}. \tag{10}$$

На самом деле, так как функция

$$f(q) = (|\xi_l|^q - \delta)^{1/q}$$

возрастает при $q \geqq 1$, причем при $q=1$ неравенство (10) имеет место, то неравенство (10) справедливо для всех $q \geqq 1$. Следовательно,

$$\sum_{k=m}^{l-1} |\xi_k|^q + |\xi_l'|^q = \sum_{k=m}^{l-1} |\xi_k|^q + \frac{a}{2} - \sum_{k=m}^{l-1} |\xi_k|^q = \frac{a}{2}.$$

Пусть $\xi_l'' = \xi_l - \xi_l'$. Тогда в силу неравенства (10)

$$\sum_{k=l+1}^{n} |\xi_k|^q + |\xi_l''|^q \leqq \sum_{k=l+1}^{n} |\xi_k|^q + |\xi_l|^q - \delta = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Кроме того, из неравенства $|\xi_l'|^q < |\xi_l|^q$ следует, что $|\xi_l'| < |\xi_l|$ и, следовательно, учитывая 2°, получаем, что $|\xi_l''| < |\xi_l|$. Итак, условия леммы при $s=1$ выполнены. Доказательство леммы заканчиваем дословно так, как это делается в монорафии [1].

Доказательство теоремы 1. Не ограничивая общности, положим $|\xi_k| \leqq 1$

$(k=1, 2, \ldots, n)$. В силу леммы мы имеем

$$\max_{n \leqq m} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t) \right| = \left| \sum_{s=1}^{\nu} \eta_s P_s^{(i_s)}(t) + \xi'_{\bar{q}} \varphi_{\bar{q}}(t) \right|, \tag{11}$$

где η_s, i_s и $\bar{q}$ зависят от t, η_s принимает значения 0 или 1, i_s — $1, \ldots, 2^\nu$ а $\bar{q}$ — значения $1, \ldots, m$. Так как в силу неравенства (4) имеем, что

$$\int_{T_\varepsilon} |\varphi_k(t)|^p u(dt) \leqq M_{\varepsilon pq}$$

то, следовательно, в силу неравенства $q<p$

$$\int_{T_\varepsilon} \sum_{k=1}^{m} |\xi'_k|^p |\varphi_k(t)|^p \mu(dt) \leqq M_{\varepsilon pq} \sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^q. \tag{12}$$

Кроме того,

$$\left| \sum_{s=1}^{\nu} \eta_s P_s^{(i_s)}(t) \right| \leqq \sum_{s=1}^{\nu} |P_s^{(i_s)}(t)| \leqq \sum_{s=1}^{\nu} 2^{-\beta s} \left\{ 2^{\beta ps} \sum_{i=1}^{2^s} |P_s^{(i)}(t)|^p \right\}^{1/p},$$

где $0<\beta<\dfrac{1}{q}<\dfrac{1}{p}$. Следовательно, при помощи неравенства Гельдера получаем, что при $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$

$$\left(\max_{n \leqq m} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t) \right| \right)^p \leqq 2^{p-1} \left\{ \sum_{s=1}^{\nu} 2^{-\beta sp'} \right\}^{p/p'} \sum_{s=1}^{\nu} 2^{\beta ps} \sum_{i=1}^{2^s} |P_s^{(i)}(t)|^p + 2^{p-1} \sum_{k=1}^{m} |\xi'_k \varphi_k(t)|^p \leqq$$

$$\leqq 2^{p-1} M \sum_{s=1}^{\nu} 2^{\beta ps} \sum_{i=1}^{2^s} |P_s^{(i)}(t)|^p + 2^{p-1} \sum_{k=1}^{m} |\xi'_k \varphi_k(t)|^p.$$

Применяя неравенства (4), получаем, что

$$\int_{T_\varepsilon} \left(\max_{n \leqq m} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t) \right| \right)^p \mu(dt) \leqq$$

$$\leqq 2^{p-1} M \sum_{s=1}^{\nu} 2^{\beta ps} \sum_{i=1}^{2^s} \int_{T_\varepsilon} |P_s^{(i)}(t)|^p \mu(dt) + 2^{p-1} M_{\varepsilon pq} \sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^q \leqq$$

$$\leqq 2^{p-1} M_{\varepsilon pq} M \sum_{s=1}^{\nu} 2^{\beta ps} \sum_{i=1}^{2^s} \left(A(P_s^{(i)}) \right)^{p/q} + 2^{p-1} M_{\varepsilon pq} \sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^q \leqq$$

$$\leqq 2^{p-1} M M_{\varepsilon pq} \sum_{s=1}^{\nu} 2^{\beta ps} \sum_{i=1}^{2^s} \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^q \right)^{p/q} 2^{-(p/q)s} + 2^{p-1} M_{\varepsilon pq} \sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^q =$$

$$= 2^{p-1} M M_{\varepsilon pq} \sum_{s=1}^{\nu} 2^{s(\beta p+1-p/q)} \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^q \right)^{p/q} + 2^{p-1} M_{\varepsilon pq} \sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^q.$$

Так как $\beta p+1<p/q$, то сходится ряд

$$\sum 2^{s(\beta p+1-p/q)},$$

вследствие чего получаем неравенство (5).

Литература

[1] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды* (Москва, 1959).
[2] В. Ф. Гапошкин, Лакунарные ряды и независимые функции, *Успехи матем. наук*, **22:** 6 (1966), 3—82.
[3] Н. Данфорд—Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория* (Москва, 1962).
[4] С. Качмаж—Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов* (Москва, 1958).
[5] Е. М. Никишин, Резонансные теоремы и надлинейные операторы, *Успехи матем. наук*, **25:** 1 (1970), 129—191.

(Поступило 29/6/1973)